PART2　等差数列の和

例題

(1)　初項 3，末項 21，項数 10 の等差数列の和を求めよ。

(2)　初項 60，公差 -6 の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。また，S_{10} を求めよ。

(3)　初項 5，公差 9 の等差数列の第 11 項から第 20 項までの和を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　初項 3，公差 -7 の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。また，S_{20} を求めよ。

(2)　初項 2，公差 4 の等差数列の第 20 項から第 40 項までの和を求めよ。

第 1 講　PART2 確認問題

1　初項 20，公差 -4 の等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \boxed{\text{アイ}}\,n^2 + \boxed{\text{ウエ}}\,n$$

である。また，$S_{10} = \boxed{\text{オカ}}$ である。

2　初項 -17，公差 3 の等差数列の第 11 項から第 20 項までの和は $\boxed{\text{キクケ}}$ である。

PART2　等差数列の和

例題

(1)　初項 3，末項 21，項数 10 の等差数列の和を求めよ。

(2)　初項 60，公差 -6 の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。また，S_{10} を求めよ。

(3)　初項 5，公差 9 の等差数列の第 11 項から第 20 項までの和を求めよ。

(1)　$\dfrac{1}{2}\cdot 10\cdot(3+21)=120$

(2)　$S_n=\dfrac{1}{2}n\{2\cdot 60+(n-1)\cdot(-6)\}=\dfrac{1}{2}n(126-6n)=3n(21-n)$

$S_{10}=3\cdot 10\cdot(21-10)=330$

(3)　この数列の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot 5+(n-1)\cdot 9\}=\frac{1}{2}n(9n+1)$$

求める和は $S_{20}-S_{10}=\dfrac{1}{2}\cdot 20\cdot(9\cdot 20+1)-\dfrac{1}{2}\cdot 10\cdot(9\cdot 10+1)=1355$

(別解)

この数列の一般項を a_n とすると　$a_n=5+(n-1)\cdot 9=9n-4$

求める和は，初項 $a_{11}=95$，末項 $a_{20}=176$，項数 $20-11+1=10$ の等差数列の和より

$$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot(95+176)=1355$$

練習

(1)　初項3，公差 -7 の等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。また，S_{20} を求めよ。

(2)　初項2，公差4の等差数列の第20項から第40項までの和を求めよ。

(1)　$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot3+(n-1)\cdot(-7)\}=\frac{1}{2}n(13-7n)$

$S_{20}=\frac{1}{2}\cdot20\cdot(13-7\cdot20)=-1270$

(2)　この数列の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot2+(n-1)\cdot4\}=\frac{1}{2}n\cdot4n=2n^2$$

求める和は $S_{40}-S_{19}=2\cdot40^2-2\cdot19^2=2478$

(別解)

この数列の一般項を a_n とすると　$a_n=2+(n-1)\cdot4=4n-2$

求める和は，初項 $a_{20}=78$，末項 $a_{40}=158$，項数 $40-20+1=21$ の等差数列の和より

$$\frac{1}{2}\cdot21\cdot(78+158)=2478$$

第 1 講　PART2 確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：-2，ウエ：22，オカ：20

[解説]

初項が 20，公差が -4 であるから，数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot20+(n-1)\cdot(-4)\}$$ [A]

$$=\frac{n}{2}(-4n+44)$$

$$=\mathbf{-2n^2+22n}$$

また

$$S_{10}=-2\cdot10^2+22\cdot10$$

$$=-200+220=\mathbf{20}$$

[A]　初項 a，公差 d，項数 n の等差数列の和 S_n は

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$$

2 [正解] キクケ：265

[解説]

等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot(-17)+(n-1)\cdot 3\}$$ [B]

$$=\frac{1}{2}n(3n-37)$$

[B]　まずは初項から第 n 項までの和を n の式で表す。

求める和は $S_{20}-S_{10}$ である。[C]

[C]　求める和は，$a_1+a_2+\cdots+a_{20}$ から $a_1+a_2+\cdots+a_{10}$ を引いたものである。

$$S_{20}=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot(3\cdot 20-37)=230$$

$$S_{10}=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot(3\cdot 10-37)=-35$$

であるから

$$S_{20}-S_{10}=230-(-35)=\mathbf{265}$$

（別解）

等差数列の第 n 項を a_n とすると

$$a_n=-17+(n-1)\cdot 3=3n-20$$

$$a_{11}=3\cdot 11-20=13$$

$$a_{20}=3\cdot 20-20=40$$

求める和は，初項 $a_{11}=13$，末項 $a_{20}=40$，項数 $20-11+1=10$ の等差数列の和であるから [D]

[D]　和 $a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{20}$ を a_{11} を初項とする等差数列の和とみて求める。

$$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot(13+40)=\mathbf{265}$$